LISTA 4/Trabalho Final – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EDPs

Data de entrega: 05/07/2010; **entregar digitado em LaTeX, arquivo pdf.**

Peso igual ao de uma prova.

(1) Equação de Poisson: Usando a molécula de 5 pontos resolva a equação de Poisson explorando o seguintes aspectos de Álgebra Linear Numérica. A saber:

(a): Solução direta do sistema de equações lineares. No MATLAB via o comando **mldivide** (leia-se o operador "backslash").

(b): Solução pelo método iterativo de Gauss-Seidel.

(c): Solução pelo método iterativo **SOR**.

Material de consulta, inclusive explicando o **SOR** ("Sucessive Over-Relaxation Method") está na xerox, tirada a partir dos Capítulos 7 e 12 do Burden & Faires (da minha edição).

Meta desta parte do subprojeto: ser capaz de *aprender sozinho* uma técnica, a de aceleração de convergência (SOR), *usá-la, explorá-la e relatá-la* no contexto de EDPs numéricas. Quero ver a capacidade investigativa e curiosidade matemática de cada um de voces.

Dicas:

(i): Para fazer uma competição de eficiência entre as técnicas, é interessante usar os comandos MATLAB **tic** e **toc** que calculam o tempo gasto para os comandos entre eles.

(ii): Para obter uma solução exata de Poisson é muito fácil: seja $h(x, y)$ uma função suave. Calcule Δh e chame o resultado de $f(x, y)$. Aí está nossa eq. de Poisson $\Delta u = f$ com solução conhecida.

---

(2): ONDAS aquáticas lineares = misturando Laplace com um problema de evolução:

(2a): Considere o seguinte problema relativo a uma função harmônica $\phi(x, y)$ na faixa $\Omega = \{(x, y), \quad y \in (-1, 0)\}$. A condição de contorno no bordo superior é de Dirichlet ($\phi(x, 0) = \psi(x)$) e no bordo inferior é Neumann (homogênea). Imagine que temos toda a regularidade necessária e que a solução decaia rapidamente no infinito (assim como seus valores ao longo do contorno). Defina a aplicação **Dirichlet-Neumann** como $DtN[\psi](x) = d\phi/dn$ no bordo superior. Usando análise de Fourier mostre que

$$DtN[\psi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -i \tanh(k) \ \widehat{[\psi_x]} \ e^{ikx} dk.$$

Dica: primeiro encontre uma solução (harmônica) com uma estrutura semelhante a esta, ou seja que está automaticamente satisfazendo à Neumann.

(2b): O problema linear de ondas aquáticas dispersivas pode ser escrito da seguinte forma:

$$\beta\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \quad \text{em} \quad \Omega_\beta,$$

com as seguintes condições de fronteira. Em $y = 0$ (tida como a superfície do mar)

$$\phi_t = -\eta, \qquad \eta_t = \frac{1}{\beta}\phi_y.$$

No fundo impermeável do mar (em $y = -\sqrt{\beta}$) temos a condição de Neumann $d\phi/dn = 0$. A notação é a seguinte. O parâmetro ($\beta = h_o^2/\lambda^2$) descreve quão rasa é a água (de profundidade h_o) com respeito ao comprimento de onda λ. Temos que $\phi(x, y, t)$ é o potencial de velocidades, ou seja $\nabla\phi \equiv (u(x, y, t), v(x, y, t))$, velocidades horizontal (u) e vertical (v) do fluido. A onda (elevação da superfície do mar) é descrita pela função $\eta(x, t)$ restrita à ($y \equiv 0$). A condição de Neumann nos garante que não há fluxo normal ao fundo do mar, ou seja, que este é impermeável.

Adaptando a técnica da parte (2a) (agora com o β) podemos reescrever este problema com uma "cara" de um sistema de EDOs:

$$\psi_t = -\eta, \qquad \eta_t = \frac{1}{\beta}DtN[\psi],$$

garantindo que estamos o tempo todo (literalmente falando) tratando da evolução de uma função harmônica. O esquema de evolução é dado na seção 5 (pag. 13) do artigo em anexo. Usando FFT para a parte **DtN** e o esquema de evolução explícito ($\theta = 0$; pag.14) reproduza o resultado do artigo onde o potencial inicial é uma Gaussiana. Explore computacionalmente...

(2c): Em palavras (sem necessidade de implementar ou detalhar) comente sobre este método em contraste com o de diferenças finitas (usando por exemplo uma estratégia como a da parte (1) acima) e também o esquema BIEM descrito em sala.

(2d): No regime de águas rasas (equivalentemente ondas longas) temos que $\beta = \varepsilon \ll 1$. Neste regime o símbolo (multiplicador de Fourier) do operador DtN (em particular a tanh) pode ser aproximado ficando (o DtN) com uma aparência de um operador diferencial(*). Que equação conhecida emerge/aparece neste limite? Elimine o η do sistema.

(*) No caso geral o operador DtN é chamado de um operador pseudo-diferencial pois o seu símbolo $s(k)$

$$DtN[\psi](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(k)\ \widehat{[\psi]}\ e^{ikx}dk.$$

não é um polinômio em k.