Métodos numéricos para EDPs – primeira lista de exercícios

Leonardo de Oliveira Carvalho

25 de março de 2010

Exercício 1

Vamos analisar os métodos EuE, EuI e Trap (implementados em MATLAB) para o sistema de EDOs:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \delta \\ -\delta & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

Este sistema pode ser escrito na forma $\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}$. Os auto-valores de A são complexos conjugados $\lambda^+ = \varepsilon + i\delta$ e $\lambda^- = \varepsilon - i\delta$. A solução oscila no tempo de acordo com o valor de δ, e cresce ou decresce de acordo com ε.

Semi-plano esquerdo

Vamos inicialmente analisar o comportamento das soluções aproximadas no semi-plano esquerdo. Neste caso teremos $\varepsilon < 0$, e a solução tende a zero quando $t \to \infty$.

Euler explícito

Para que o método de Euler explícito forneça uma solução que tenda a zero, é preciso que o fator de amplificação seja menor do que 1, então precisamos que $|h\lambda^+ + 1| < 1$ e $|h\lambda^- + 1| < 1$. É fácil ver que $|h\lambda^+ + 1| = |h\lambda^- + 1|$, e portanto basta analisar apenas um dos $\lambda^\pm$.

Tomando por exemplo $\varepsilon = -1$ e $\delta = 10$. O gráfico abaixo ilustra o resultado obtido pelo método EuE usando o passo $h = 0.025$.

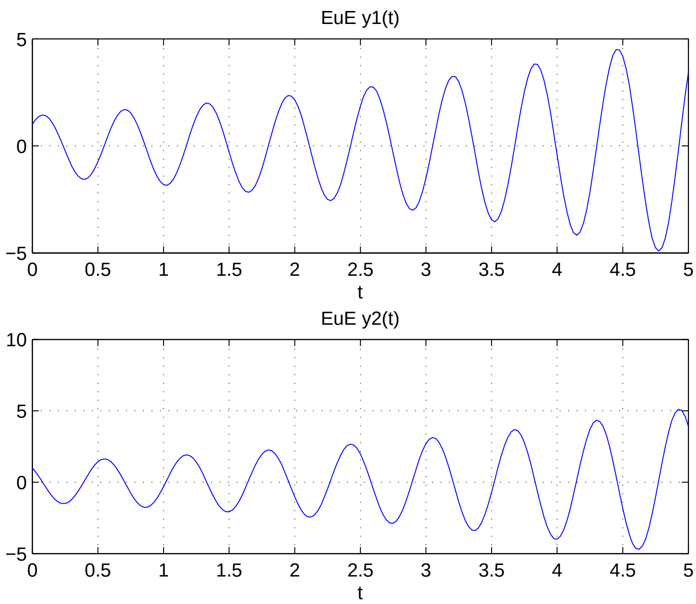

Figura 1: Resultado do método de EuE para $\varepsilon = -1$, $\delta = 10$ e $h = 0.025$.

Observe que há uma tendência ao crescimento das funções. O fator de amplificação neste caso é $|h(\varepsilon + i\delta) + 1| = |0.025(-1 + i \cdot 10) + 1| = 1.0065 > 1$. Mas é possível modificar o passo h para que este valor seja menor do que 1. O próximo gráfico mostra o resultado obtido ao trocar o passo por $h = 0.01$.

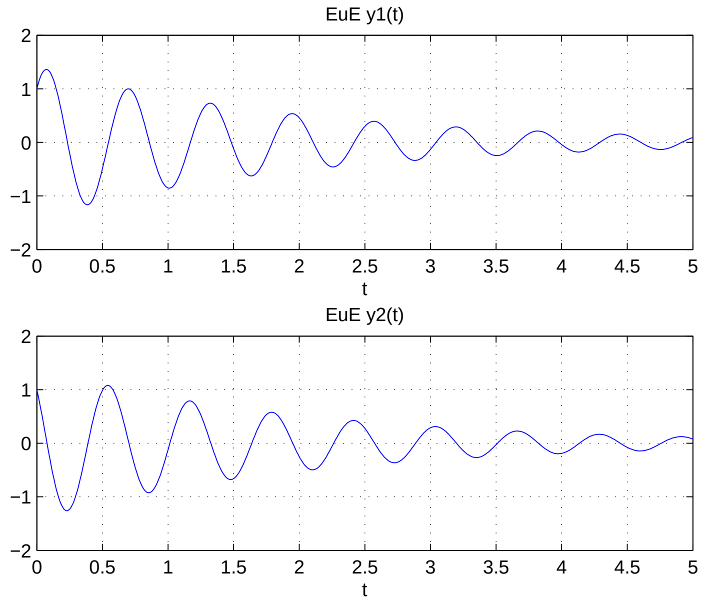

Figura 2: Resultado do método de EuE para $\varepsilon = -1$, $\delta = 10$ e $h = 0.01$.

Percebe-se que a solução está tendendo a zero, conforme se esperava. O fator de amplificação é $|h(\varepsilon + i\delta) + 1| = 0.995 < 1$, ou seja, estamos na região de estabilidade do método.

Euler implícito

No caso do método de Euler implícito, precisamos que $|h\lambda^{\pm} - 1| > 1$, o que sempre irá ocorrer. Por exemplo usando os mesmos valores anteriores obtemos o seguinte resultado

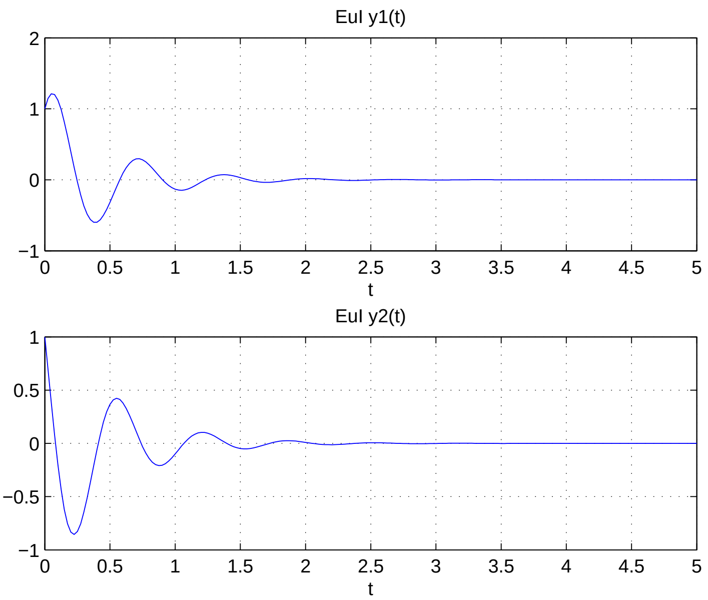

Figura 3: Resultado do método de EuI para $\varepsilon = -1$, $\delta = 10$ e $h = 0.025$.

Mesmo com passos "largos" a solução sempre irá tender a zero. Abaixo vemos o resultado tomando

$h = 0.1$, apesar de ser uma aproximação grosseira, as funções tendem a zero.

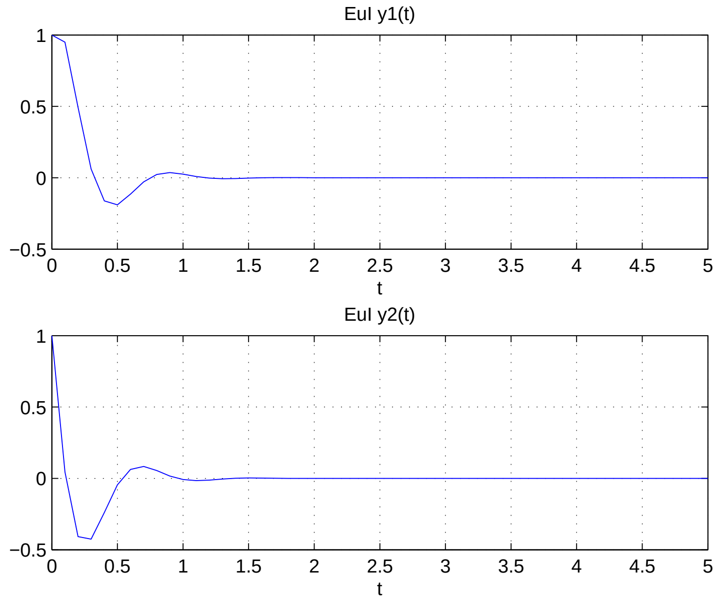

Figura 4: Resultado do método de EuI para $\varepsilon = -1$, $\delta = 10$ e $h = 0.1$.

Trapézio

Sabemos que, utilizando o método do Trapézio, qualquer auto-valor no semi-plano esquerdo estará na região de estabilidade, então, assim como EuI, para qualquer passo h a solução apresentada por este método tende a zero. A figuras abaixo ilustram este comportamento:

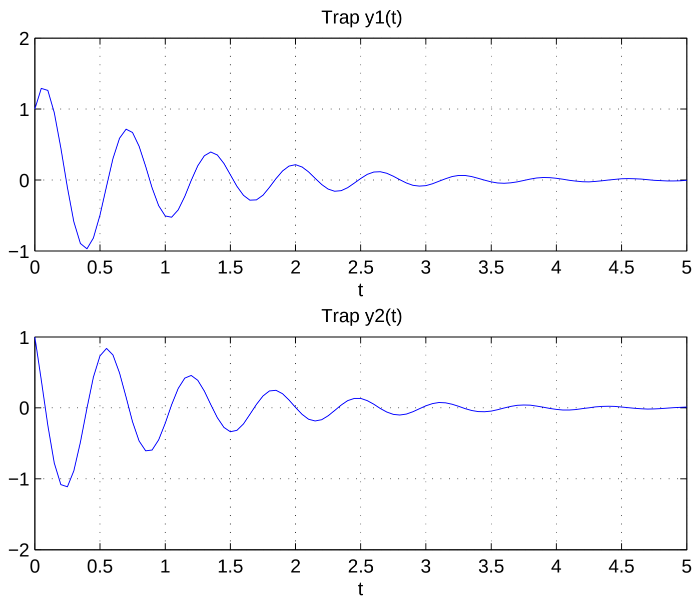

Figura 5: Resultado do método Trap para $\varepsilon = -1$, $\delta = 10$ e $h = 0.05$.

Observe também que o método do Trapézio apresenta um resultado mais preciso do que os anteriores. Comparando as figuras 4 e 6 vemos que com o mesmo passo de tempo, a solução deste último está mais próxima da solução real.

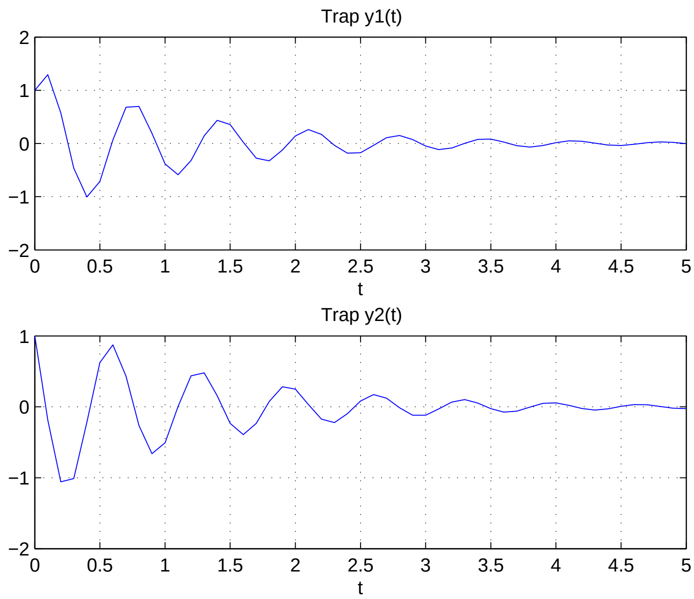

Figura 6: Resultado do método Trap para $\varepsilon = -1$, $\delta = 10$ e $h = 0.1$.

Exercício 3

Neste exercício é feito um esboço da área de estabilidade absoluta do método de Runge-Kutta de quarta ordem, utilizando como ferramenta o MATLAB.

Seja uma EDO da forma: $\frac{dy}{dt} = f(y,t)$, com $y(t_0) = y_0$. Este método de resolução é dado por:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right),$$

$$\begin{aligned}
K_1 &= f(Y_n, t_n) \\
K_2 &= f(Y_n + h/2K_1, t_n + h/2) \\
K_3 &= f(Y_n + h/2K_2, t_n + h/2) \\
K_4 &= f(Y_n + hK_3, t_n + h).
\end{aligned}$$

Onde h é o passo no parâmetro t, e $Y_0 = y_0$.

Tomamos então o Problema-Teste fazendo $f(y,t) = \lambda y$, onde λ é um complexo com parte real negativa. Vamos calcular o fator de amplificação???. Para $n = 1$, teremos:

$$\begin{aligned}
K_1 &= f(Y_0, t_0) = \lambda Y_0 \\
K_2 &= f(Y_0 + h/2K_1, t_0 + h/2) = \lambda Y_0\left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right) \\
K_3 &= f(Y_0 + h/2K_2, t_0 + h/2) = \lambda Y_0\left(1 + \frac{h\lambda}{2} + \frac{h^2\lambda^2}{4}\right) \\
K_4 &= f(Y_0 + hK_3, t_0 + h) = \lambda Y_0\left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} + \frac{h^3\lambda^3}{4}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_1 &= Y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
&= Y_0\left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} + \frac{h^3\lambda^3}{6} + \frac{h^4\lambda^4}{24}\right)
\end{aligned}$$

Fazendo $z = h\lambda$, temos:

$$Y_1 = Y_0\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}\right)$$

Desta forma obtemos:

$$\begin{aligned}
Y_2 &= Y_1\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}\right) \\
&= Y_0\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}\right)^2 \\
Y_3 &= Y_2\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}\right) \\
&= Y_0\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}\right)^3 \\
&\vdots \\
Y_n &= Y_0\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}\right)^n
\end{aligned}$$

Assim temos o fator de amplificação $r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}$. A região de estabilidade absoluta é aquela em que $|r(z)| < 1$. Sendo $z = \xi + i\eta$, podemos encontrar essa região atribuindo valores a ξ e procurando os valores de η tais que $|r(z)| < 1$. O seguinte código para MATLAB realiza esta operação:

```
hold on;
for ksi = -3:0.02:0.5
    for eta = -3:0.05:3
       z = complex(ksi, eta);
       v =  1 + z + 1/2*z^2 + 1/6*z^3 + 1/24*z^4;
       if(abs(v) < 1)
           plot(ksi, eta);
       end
    end
end
```

Ao ser executado, este programa gera o gráfico:

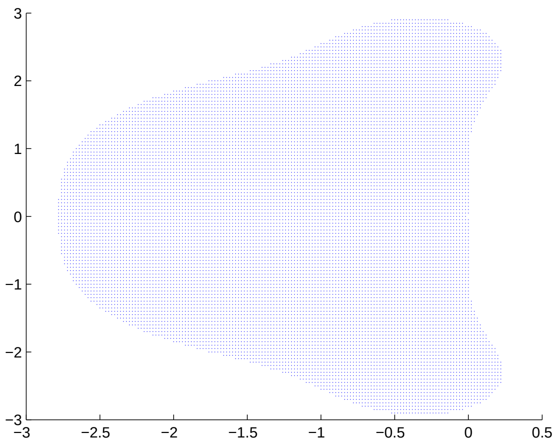

Figura 7: Esboço da região de estabilidade absoluta do método Runge-Kutta.