LISTA 2 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EDPs

data de entrega: 13/04/2010

(1): Considere a equação de difusão $u_t = \kappa u_{xx}$, com condições de contorno iguais a zero no intervalo [0,1].

(1.A): Escreva o método de Crank-Nicolson na forma matricial

$$AU^{(n+1)} = BU^{(n)}, \quad \text{com} \;\; A \equiv C - \frac{2}{\alpha}I \;\; \text{e} \;\; B \equiv -C - \frac{2}{\alpha}I,$$

onde o parâmetro α é $\kappa\Delta t/\Delta x^2$ e a matriz C é tridiagonal com -2 na principal e 1 nas duas diagonais secundárias.

(1.B): Explique porque, para estudar a evolução discreta do sistema acima, é útil estudar o problema $(B - \lambda A)v = 0$. Use este fato para calcular o espectro $(\sigma(C))$ de C e concluir que

$$\lambda_k = \frac{2 + \alpha\mu_k}{2 - \alpha\mu_k}, \quad \text{onde} \quad \mu_k = -4\sin^2(\pi k\Delta x) \in \sigma(C).$$

Uma dica no cálculo de $\sigma(C)$: para a solução analítica de fórmulas de recorrência (a coeficientes constantes) muitas vezes é útil considerar um modo de Fourier. Quais são os autovetores de interesse neste problema? Eles podem ser calculados explicitamente?

(1.C): Qual a condição de estabilidade do método de Crank-Nicolson? Os itens acima servem para provar que o método de Crank-Nicolson é......

(2): Implemente no MATLAB a equação da onda $u_t + cu_x = 0$ com o método upwind e o método Lax-Wendroff. Use como dados iniciais uma Gaussiana e também uma função de Heaviside, como se fosse uma frente de onda, viajando da esquerda para a direita, com o u saltando de zero para 1 assim que a onda passa por um ponto (x,t). Note que as condições de contorno devem ser ajustadas dependendo do caso. Calibre seus experimentos numéricos para observar, e depois diminuir, efeitos de dissipação e dispersão numérica.

(3): Implemente no MATLAB o problema da enchente (equação de Burgers) com o método conservativo explicado em aula (EDPN 21). Coloque condições de contorno nulas com um perfil inicial Gaussiano. Usando a FFT do MATLAB verifique que a não-linearidade da equação de Burgers faz com que o espectro de Fourier aumente no tempo, ou seja, novas frequências são produzidas pelo aumento de inclinação da onda de enchente. Compare com o problema linear.